XXIV Всеукраїнська заочна математична олімпіада “5–12”

В олімпіаді може взяти участь кожен учень 5 – 12 класів. Наполегливо радимо потренуватися та випробувати свої здібності всім претендентам на участь в обласних та Всеукраїнській олімпіадах, а також відбіркових змаганнях на Міжнародну математичну олімпіаду.

Розв’язання задач слід надсилати до 25 лютого 2020 року (за поштовим штемпелем) на адресу

`01601 МСП, Київ,`
`Київський національний університет ім. Тараса Шевченка`
`механіко-математичний факультет`
`кафедра математичного аналізу`
`‘‘Олімпіада 5-12’’`

або у відсканованому вигляді на електронну адресу `olymp5-12@ukr.net`.

Підсумки олімпіади буде підведено наприкінці березня на сайті

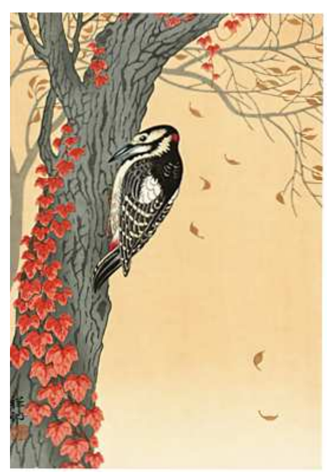
`http://www.mechmat.univ.kiev.ua` .

Умови задач

1. Чи існують такі натуральні числа n і k, що n дає остачу 5 при діленні на k та k дає остачу 12 при діленні на n?

2. На острові живуть ельфи, які завжди брешуть гномам, гноми, які завжди брешуть тролям, та тролі, які завжди брешуть ельфам. В інших випадках усі завжди кажуть правду. Якось Арос сказав Бору: “Ти ельф”, Бор сказав Волгу: “Ти гном”, Волг сказав Горму: “Ти троль” та Горм сказав Аросу: “Ти ельф”. Ким є учасники цієї розмови?

3. Яку найменшу кількість пальм можна посадити на площині так, аби для будь-якого числа від 1 до 5 знайшлося принаймні дві прямі, на кожній з яких ростуть рівно стільки пальм?



4. У десятковому записі натурального числа n немає цифр 1, 2 та 9. Довести, що у записі числа $3n$ є хоча б одна із цих цифр.

5. У турнірі кожні дві з 7 команд зіграли між собою один раз на одному з 5 стадіонів. Чи обов’язково знайдуться стадіон та 4 команди, жодна з ігор між якими не проходила на цьому стадіоні?

6. Двоє дятлів по черзі видовбують клітинки з клітчастої дошки розміру $m \times k$, де $m \geq 4$ та $k \geq 4$. За один хід дозволяється видовбати рівно 8 клітинок, серед яких кожна наступна клітинка має спільну сторону з попередньою. Програє дятел, який не може зробити хід. Хто з дятлів має виграшну стратегію?

7. Дано трикутник ABC. Побудувати точку D на стороні AB та точку E на стороні AC так, що $BD = CE$ та $\angle ADC = \angle BEC$.

8. На емблемі олімпіади зображено 5 правильних шестикутників зі стороною a, розташованих всередині правильного шестикутника зі стороною b. Знайти $\frac{b}{a}$.

9. Про невід'ємні числа x, y, z відомо, що $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Довести нерівність

$$\frac{x^3}{8y^3+1} + \frac{y^3}{8z^3+1} + \frac{z^3}{8x^3+1} \geq \frac{x+y+z-2}{3}.$$

10. Прямокутник розрізали на менші прямокутники горизонтальними та вертикальними прямими так, що був хоча б один горизонтальний та хоча б один вертикальний розріз. Виявилося, що площі всіх утворених прямокутників утворюють арифметичну прогресію. Довести, що всі ці прямокутники є рівними.

11. Нехай O — центр кола, описаного навколо гострокутного трикутника ABC, а N — середина дуги $\smile ABC$ цього кола. На сторонах AB та BC відмітили точки D та E відповідно так, що точка O лежить на відрізку DE. Прямі DN та BC перетинаються у точці P, а прямі EN та AB — у точці Q. Довести, що $PQ \perp AC$.

12. Знайти всі трійки натуральних чисел (a, b, c), для яких $\dfrac{a^2+b}{b^2+a} = c$ та $\dfrac{a^2+c}{c^2+a} = b$.