Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Інститут модернізації змісту освіти

LVII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Перший день

11 клас

11–1. Знайдіть усі трійки попарно різних натуральних чисел (a, b, c), які задовольняють умову: число $2a-1$ ділиться націло на b, число $2b-1$ ділиться націло на c і число $2c-1$ ділиться націло на a.

11–2. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоту AH і медіану AM. На прямих AB і AC взято точки X та Y відповідно так, що $AX = XC$ і $AY = YB$. Доведіть, що середина відрізка XY рівновіддалена від точок H і M.

11–3. Знайдіть усі функції $f:[0, +\infty) \to [0, +\infty)$, які для усіх невід'ємних x, y задовольняють рівності:

$$f(f(x) + f(y)) = xyf(x+y).$$

11–4. Два гравці – Андрій та Олеся грають у таку гру. На столі лежить круглий торт, який один з них розрізає на $2n$, $n>1$ попарно різних за вагою секторів (шматочків). Вага кожного шматочка відома обом гравцям. Після цього вони вибирають собі шматочки за такими правилами. Спочатку Олеся вибирає собі 1 шматочок, далі Андрій вибирає собі 2 шматочки, але таким чином, щоб шматочки, які залишаться на столі після його ходу, утворювали сектор. Далі вони по черзі беруть по 2 шматочки так, щоб після кожного ходу шматочки торту, що залишилися на столі, утворювали сектор. Останнім ходом один з гравців забирає останній шматочок. Кожний з гравців прагне, щоб загальна вага частини торту, яку він взяв, була більшою, ніж у супротивника. Для яких n Олеся може так розрізати торт на шматочки, щоб виграти, якщо своїм першим ходом вона бере найменший шматочок?

Одеса, 20 березня 2018 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Інститут модернізації змісту освіти

LVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Другий день

11 клас

11–5. На острів насуває ескадра, в якій є 10 потужних есмінців, а також ще 20 невеликих катерів. Всі вони вишикувані в одну лінію, причому відстані між сусідніми кораблями рівні, і саме так наближаються до острову. Острів захищають два торпедоносних катери, у кожного з яких є рівно по 10 торпед. Пускові установки в них налаштовані так, що перший може випустити одночасно усі 10 торпед по сусіднім 10 цілям, а другий усі 10 торпед по 10 цілям, що йдуть через одну. Відомо, що вони стріляють одночасно (тобто в деякі цілі можуть влучити одночасно дві торпеди). Яка найбільша кількість есмінців може напевно залишитися цілою, за будь-яких дій оборони острова?

11–6. Послідовність (x_n) задається умовами $x_1 = a$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{1}{x_n}\right)$, $n \in N$.

Доведіть, що існує a, для якого послідовність (x_n) містить рівно 2018 попарно різних членів. *(Якщо деякий член послідовності дорівнює 0, то послідовність на цьому елементі обривається.)*

11–7. Задані N натуральних чисел такі, що найбільші спільні дільники усіх непорожніх наборів цих чисел (по одному, два, три, тощо) попарно різні. Яка найменша кількість різних простих дільників може бути у добутку усіх N чисел?

11–8. Дано гострокутний трикутник ABC, AA_1 та CC_1 – його бісектриси, I – центр вписаного кола, M і N – середини відрізків AI та CI відповідно. Всередині трикутників AC_1I та A_1CI відповідно вибрали точки K і L так, що $\angle AKI = \angle CLI = \angle AIC$, $\angle AKM = \angle ICA$, $\angle CLN = \angle IAC$. Доведіть, що радіуси описаних кіл трикутників KIL та ABC рівні.

Одеса, 21 березня 2018 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів