Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Інститут модернізації змісту освіти

LVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Перший день

10 клас

10–1. Розв'яжіть в натуральних числах x, y, p, n, k систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5x + y = p^k, \\ 5y + x = p^{k+n}. \end{cases}$$

10–2. Дано рівнобедрений тупокутний трикутник ABC з вершиною у точці B. Серединний перпендикуляр до сторони BC перетинає прямі AC і AB в точках K і M відповідно. Доведіть, що точка, симетрична точці A відносно прямої BK, лежить на прямій CM.

10–3. Два гравці – Андрій та Олеся грають у таку гру. На столі лежить круглий торт, який один з них розрізає на $4n$ попарно різних за вагою секторів (шматочків). Вага кожного шматочка відома обом гравцям. Після цього вони вибирають собі шматочки за такими правилами. Спочатку Андрій вибирає собі 1 шматочок, далі Олеся вибирає собі 2 шматочки, але таким чином, щоб шматочки, які залишаться на столі після її ходу, утворювали сектор. Далі вони по черзі беруть по 2 шматочки так, щоб після кожного ходу шматочки торту, що залишилися на столі, утворювали сектор. Останнім ходом Андрій забирає останній шматочок. Кожний з гравців прагне, щоб загальна вага частини торту, яку він взяв, була більшою, ніж у супротивника. Чи зможе хтось гарантовано взяти собі більше половини від усього торта, якщо:

а) розрізання торту на сектори проводить Олеся;

б) розрізання торту на сектори проводить Андрій, але своїм першим ходом він не має права брати найбільший за вагою шматочок?

10–4. Знайдіть усі функції $f:[0, +\infty) \to [0, +\infty)$, які для усіх невід'ємних x, y задовольняють рівності: $f(f(x) + f(y)) = xyf(x + y)$.

Одеса, 20 березня 2018 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Інститут модернізації змісту освіти

LVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Другий день

10 клас

10–5. На острів насуває ескадра, в якій є 10 потужних есмінців, а також ще 20 невеликих катерів. Всі вони вишикувані по колу, причому відстані між сусідніми кораблями рівні, і саме так наближаються до острову. Острів захищають два торпедоносних катери, у кожного з яких є рівно по 10 торпед. Пускові установки в них налаштовані так, що перший може випустити одночасно усі 10 торпед по сусіднім 10 цілям, а другий усі 10 торпед по 10 цілям, що йдуть через одну. Відомо, що вони стріляють одночасно (тобто в деякі цілі можуть влучити одночасно дві торпеди). Яка найбільша кількість есмінців може напевно залишитися цілою, за будь-яких дій оборони острова?

10–6. Додатні числа a, b, c задовольняють умову $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Доведіть, що справджується нерівність: $c+ab \le 2$.

10–7. Задані N натуральних чисел такі, що найбільші спільні дільники усіх непорожніх наборів цих чисел (по одному, два, три, тощо) попарно різні. Яка найменша кількість різних простих дільників може бути у добутку усіх N чисел?

10–8. У трикутнику ABC пряма, що не співпадає зі сторонами трикутника та проходить через точку A, перетинає висоти BH_2 та CH_3 у точках D_1 та E_1 відповідно. Точки D_2 та E_2 симетричні точкам D_1 та E_1 відносно сторін AB і AC відповідно. Доведіть, що кола, які описані навколо трикутників D_2AB та E_2AC, дотикаються.

Одеса, 21 березня 2018 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів