*Міністерство освіти і науки України*
*Київський національний університет імені Тараса Шевченка*
*Інститут модернізації змісту освіти*

# LVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

*Перший день*

## 8 клас

**8–1.** Відомо, що для деякого значення $a$ справджується рівність: $a^4 - \frac{1}{a^2} = 4$. Чи може бути цілим число $x = a^4 + \frac{1}{a^2}$?

**8–2.** Чи існує прямокутник, який можна розрізати на $5$ квадратів, серед яких два однакові, а усі інші – попарно різні та відмінні від однакових, при цьому однакові квадрати є

***а)*** найменшими з усіх;

***б)*** найбільшими з усіх?

**8–3.** Знайдіть найбільше трицифрове число $n$, для якого виконується така умова: існує рівно $16$ пар натуральних чисел $(a, b)$, де $a < b$, для яких $n$ є найменшим спільним кратним.

**8–4.** У трикутнику $ABC$ відмічено ортоцентр $H$ і проведено висоту $AK$. Коло $w$ проходить через точки $A$ і $K$ та перетинає сторони $AB$ і $AC$ в точках $M$ та $N$ відповідно. Пряма, що проходить через точку $A$ паралельно $BC$, вдруге перетинає описані кола трикутників $AHM$ і $AHN$ в точках $X$ і $Y$ відповідно. Доведіть, що $XY = BC$.

Одеса, 20 березня 2018 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

*Міністерство освіти і науки України*
*Київський національний університет імені Тараса Шевченка*
*Інститут модернізації змісту освіти*

# LVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

*Другий день*

## 8 клас

**8–5.** Андрій та Олеся записали на дошці по натуральному числу. Виявилось, що число, записане Олесею, має суму цифр 2018 та має рівно на 1 цифру менше ніж число Андрія. Також відомо, що різниця записаних ними чисел дорівнює одноцифровому числу. Яким може бути число, що записав Андрій?

**8–6.** На сторонах $AB$, $BC$, $AC$ трикутника $ABC$ з $\angle BAC = 120°$ взято точки $M$, $K$, $N$ відповідно так, що $\Delta MKN$ є правильним, а $AM = 2{,}017$, $AN = 2{,}018$. Барон Мюнхгаузен стверджує, що $\Delta MKN$ має найменший периметр серед усіх правильних трикутників, що мають рівно по одній вершині на кожній зі сторін $\Delta ABC$. Чи не помиляється барон?

**8–7.** Кругла башта має 12 дверей, за кожною з яких схована скриня з золотом капітана Флінта. Ці двері розташовані по периметру башти на рівних відстанях між сусідніми, та занумеровані за рухом годинникової стрілки числами від 1 до 12.До башти підійшли 12 піратів, кожен з яких має один ключ, причому всі ключі занумеровані числами від 1 до 12. Відомо, що ключ з номером $n$ відкриває двері з номером $m$ тоді і тільки тоді, коли $m \vdots n$. Пірати стоять рівно по одному у кожної двері, але вони не знають номера двері, біля якої вони опинилися. Джим Хокінс знає у якого пірата який ключ і хоче, щоб ті змогли забрати якомога меншу кількість скринь з золотом. Джим може повернути башту так, щоб двері перед піратами були розташовані так, як він того бажає – але все одно номери дверей йдуть послідовно по колу за рухом годинникової стрілки $1-12$ починаючи з деякої. Яку максимальну кількість скринь із золотом зможуть напевно забрати пірати за таких умов?

**8–8.** Обчислювальний агрегат працює за таким принципом: кожної нової хвилини за поданими йому на вхід цілими числами $x_1$, $x_2$, та $x_3$ у вказаному порядку він обчислює значення $x_4$, що задовольняє рівність: $x_1(x_4 + x_2) = x_3(x_3 + x_2)$. Якщо $x_4$ виявляється не цілим, то агрегат припиняє роботу. Якщо $x_4$ ціле, то на вхід подається нова трійка чисел $x_1' = x_2$, $x_2' = x_3$ та $x_3' = x_4$ і через хвилину агрегат обчислює $x_4'$. Якщо із самого початку задати $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$, то чи пропрацює агрегат без зупинок принаймні 2018 хвилин?

Одеса, 21 березня 2018 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів