Олимпиада по математике ХФМЛ №27, 2014 г., 11 класс

1. Илья, Олег и Тарас на уроке физкультуры бегали вокруг школы. Илья каждый круг пробегал на 10 секунд быстрее Олега, а Олег – на 15 секунд быстрее Тараса. Стартовали они одновременно. Когда Илья финишировал, Олегу оставалось пробежать один круг, а Тарасу – два круга. Сколько кругов составляла дистанция?

2. Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 + 2x \cdot \sin xy + 1 = 0.$$

3. Постройте на координатной плоскости геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют равенству $\{x\}^2 + \{y\}^2 = 1$. *Здесь символом $\{\cdot\}$ обозначена дробная часть числа.*

4. На клетчатой доске размером 4×4 Соня может закрасить несколько клеток. Денис выиграет, если сумеет накрыть все эти клетки не пересекающимися и не выходящими за границу квадрата уголками из трех клеток. Какое наименьшее количество клеток должна закрасить Соня, чтобы Денис не выиграл?

5. Пусть AL – биссектриса треугольника ABC. Окружность S, проходящая через точки A и L, касается стороны BC и пересекает отрезок AB во внутренней точке P. Прямая PC вторично пересекает S в точке Q. Докажите, что прямая AQ делит отрезок LC на две равные части.

6. Докажите, что для произвольного натурального n существует многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что значения $P(1)$, $P(2)$,..., $P(n)$ являются различными степенями 2.