

Олимпиада по математике ХФМЛ №27, 2014 г., 10 класс

1. Постройте на координатной плоскости геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют равенству $|y - 2| = x^2 - 4x$.
2. По окружности длиной 60 м равномерно в одном направлении движутся две точки. Одна делает полный оборот на 5 с быстрее другой и догоняет ее через каждую минуту. Найдите скорости движения этих точек.
3. Решите уравнение: $[\sin x] \cdot \{\sin x\} = \sin x$. Здесь символами $[\cdot]$ и $\{\cdot\}$ обозначены соответственно целая и дробная части числа.
4. Найдите все натуральные n такие, что числа $12n+1$ и $75n+49$ являются точными квадратами.
5. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_0 и C_0 соответственно. Прямая, проходящая через центр вписанной окружности треугольника ABC параллельно стороне AC , пересекает прямую A_0C_0 в точке P . Докажите, что прямая PB касается описанной окружности треугольника ABC .
6. Мишень “бегущий кабан” находится в одном из n окошек, расположенных в ряд. Окошки закрыты занавесками так, что для стрелка мишень все время остается невидимой. Чтобы поразить мишень, достаточно выстрелить в окошко, в котором она в момент выстрела находится. Если мишень находится не в самом правом окошке, то сразу после выстрела она перемещается на одно окошко вправо; из самого правого окошка мишень никуда не перемещается. Какое наименьшее число выстрелов нужно сделать, чтобы наверняка поразить мишень?