

## Олимпиада по математике ХФМЛ №27, 2016 г., 9 класс

1. Изобразите на координатной плоскости множество всех точек  $(x; y)$ , координаты которых одновременно удовлетворяют уравнениям

$$|x - y| = x + y \quad \text{и} \quad |x + y| = x - y.$$

2. Найдите все тройки целых чисел  $m, n, k$ , для которых выполняется равенство

$$m^2 + n^2 + k^2 - 2m + 4n - 6k = -11.$$

3. Элиза плела рубашки из крапивы с постоянной скоростью с утра до вечера. В конце шестого дня она плела пятую рубашку, а в конце седьмого – шестую. К концу тринадцатого дня она как раз закончила очередную рубашку. Какую по счету?

4. Дан треугольник  $ABC$ . Точка  $A_B$  – основание перпендикуляра, опущенного из точки  $A$  на биссектрису внешнего угла при вершине  $B$ . Аналогично определяются точки  $A_C, B_A, B_C, C_A, C_B$ . Докажите, что  $A_B A_C = B_A B_C = C_A C_B$ .

5. Назовем пару квадратных уравнений

$$x^2 + ax + b = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + cx + d = 0$$

*дружественной*, если каждое из них имеет два корня, причем сумма их меньших корней и сумма их больших корней – корни уравнения  $x^2 + (a + c)x + b + d = 0$ . Пусть имеется несколько (больше двух) приведенных квадратных уравнений. Известно, что любая пара этих уравнений – дружественная. Докажите, что все эти уравнения имеют общий корень.

6. Дан правильный многоугольник, у которого  $2016^2$  вершин. Можно ли 2016 его вершин покрасить в синий, а 2016 других вершин – в желтый цвет так, чтобы расстояние между любыми двумя синими вершинами не равнялось ни какому из расстояний между желтыми вершинами?