

Олимпиада по математике ХФМЛ №27, 2014 г., 8 класс

1. Стреляя по мишени, Никита несколько раз попал в десятку, такое же количество раз выбил по восемь очков и несколько раз попал в пятерку. Всего он набрал 99 очков. Сколько выстрелов сделал Никита?

2. Числа a, b, c таковы, что числа $a+b+c$ и $\frac{a}{1 + \frac{a}{b+c}} + \frac{b}{1 + \frac{b}{a+c}} + \frac{c}{1 + \frac{c}{a+b}}$ – целые. Докажите,

что число $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}$ тоже является целым.

3. Найдите все простые числа p , для которых число $p^2 + 11$ имеет ровно шесть натуральных делителей (включая единицу и само число).

4. В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD равна стороне AD . На стороне AD выбрана такая точка K , что $AB = BK$. Точка C_1 такова, что K – середина отрезка CC_1 . Докажите, что $BC_1 = AC$.

5. По кругу стоят 100 коробок. В одной из них лежит 777 камней, а остальные – пустые. Даша и Тимур ходят по очереди. Начинает Даша. За один ход можно переложить один или несколько камней (но не все) из одной коробки в пустую соседнюю. Проигрывает игрок, который не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре и как для этого надо играть?