

### Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2018 год. 11 класс. 3 тур

1. На доске  $2018 \times 2018$  отмечено 4036 клеток. Оказалось, что если две отмеченные клетки стоят в одной строке (столбце), то все клетки этой строки (столбца) между этими клетками тоже отмечены. Докажите, что существует квадрат  $2 \times 2$ , все клетки которого отмечены.
2. Дано простое  $p$ . Докажите, что существует такая перестановка  $(n_1, n_2, \dots, n_p)$  чисел  $1, 2, 3, \dots, p$ , что числа  $n_1, n_1n_2, n_1n_2n_3, \dots, n_1n_2 \dots n_p$  дают разные остатки при делении на  $p$ .
3. Найдите все вещественные  $c$ , при которых существует функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что

$$f(x - f(y)) = f(x) + c[y]$$

для всех вещественных  $x$  и  $y$ , где  $[y]$  – целая часть числа  $y$ .

4. Внутри выпуклого четырехугольника  $ABCD$  выбраны некоторые точки  $P$  и  $Q$  так, что  $\angle APB = \angle CPD = \angle AQB = \angle CQD$ . Докажите, что все такие прямые  $PQ$  проходят через общую точку или параллельны друг другу.