Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2018 год. 10 класс. 3 тур

1. Генерал Тилли и граф Валленштайн играют в игру “Разделяй и властвуй!”. По правилам игры, у них есть какое-то количество оловянных солдатиков, разделенных на несколько взводов. Они командуют ими по очереди. Каждый игрок обязан дать ровно одну команду в свой ход. Возможны только две команды. По команде “Разделяй!” игрок, давший эту команду, выбирает взвод и делит его на два непустых взвода. По команде “Властвуй!” из каждого взвода удаляется по одному солдату. Проигрывает тот, кто не может дать команду и не потерять ни одного взвода. Начинает Валленштайн. Может ли он победить Тилли, если изначально имеется 7 взводов по 7 оловянных солдатиков в каждом?

2. Для натурального числа $n > 1$ обозначим через $p(n)$ наименьший простой делитель числа n. Найдите все пары натуральных чисел $a, b > 1$, для которых выполнено $a^2 + b^2 = p^2(a) + 3p^4(b)$.

3. Вокруг остроугольного треугольника ABC, в котором $AB < AC$, описана окружность ω. Прямые l_B и l_C касаются окружности ω в точках B и C соответственно, и пересекаются друг с другом в точке L. Прямая, проходящая через точку B параллельно AC, пересекает прямую l_C в точке D. Прямая, проходящая через точку C параллельно AB, пересекает l_B в точке E. Описанная окружность треугольника BDC пересекает отрезок AC в точке T. Описанная окружность треугольника BEC пересекает прямую AB в точке S, причем B лежит между точками S и A. Докажите, что прямые ST, AL и BC пересекаются в одной точке.

4. Число u – положительный корень уравнения $x^2 + x - 4 = 0$. Многочлен

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

где n натурально, имеет целые неотрицательные коэффициенты и $P(u) = 2018$.
а) Докажите, что число $a_0 + a_1 + ... + a_n$ – четно.
б) Найдите наименьшее значение, которое может принимать выражение $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.