

## Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2018 год. 8 класс. 3 тур


1. Числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам:  $x + 4 = (y - 2)^2$  и  $y + 4 = (x - 2)^2$ . Какие значения может принимать выражение  $x^2 + y^2$ ?

2. В остроугольном треугольнике  $ABC$  точка  $O$  – центр описанной окружности. Точки  $X$  и  $Y$  выбраны так, что

$$\angle XAB = \angle YCB = 90^\circ, \quad \angle ABC = \angle BXA = \angle BYC,$$

причем точки  $X$  и  $C$  расположены в разных полуплоскостях относительно  $AB$ , а точки  $Y$  и  $A$  – в разных полуплоскостях относительно  $BC$ . Докажите, что точка  $O$  является серединой отрезка  $XY$ .

3. В таблице  $27 \times 27$  расставлены попарно различные натуральные числа, не превосходящие  $2 \cdot 27^2$ . В каждой строке и в каждом столбце посчитали НОД всех чисел. Могло ли оказаться, что все эти 54 НОДа различны?

4. Назовем корабликом фигурку, состоящую из клетки  $1 \times 1$  и двух ее половинок: . Внутри клетчатой доски  $10 \times 10$  находится невидимый кораблик. Кораблик может быть повернут, а его средняя клетка  $1 \times 1$  должна полностью покрывать клетку большого квадрата. Пират Джо стреляет по доске и пытается попасть в кораблик. Одним выстрелом можно взорвать какую-то половину клетки, на которые ее разбивает любая из ее диагоналей. Если взорвана любая внутренняя часть кораблика, то он будет потоплен. Какого наименьшего количества выстрелов наверняка хватит Джо, чтобы потопить кораблик?