


Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2018 год. 11 класс. 1 тур

1. Известно, что наибольший общий делитель чисел a и b в 9 раз меньше, чем наибольший общий делитель чисел $a + 6$ и b . Какие значения может принимать $\text{НОД}(a, b)$?
2. Задано натуральное число n . Сколькими способами можно разбить доску $4 \times 4n$ на фигурки вида: ? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.
3. В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H , а биссектрисы – в точке I . Окружность, описанная около треугольника IBC , пересекает отрезок AB в точке T . Точка Q – основание перпендикуляра, опущенного из точки H на прямую IA . Точка P такова, что Q – середина отрезка PT . Докажите, что точки B, H и P лежат на одной прямой.
4. Дана последовательность $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$ неотрицательных чисел, причем $c_{2018} > 0$. Последовательность многочленов определяется следующим образом:

$$P_{-1}(x) = 0, \quad P_0(x) = 1, \quad P_{n+1}(x) = xP_n(x) + c_n P_{n-1}(x) \quad \text{при } n \geq 0.$$

Докажите, что не существует натурального $n > 2018$ и действительного a таких, что

$$P_{2n}(x) = P_n(x^2 + a).$$