

Олимпиада по математике ХФМЛ 27, 2017 г., 8 класс

1. Вова принес в школу полностью заряженный планшет. За первые две перемены, играя на планшете, он израсходовал ровно половину заряда. На третьей перемене Вова одолжил свой планшет Диме, и тот играл на нем до тех пор, пока заряда не осталось в два раза меньше, чем израсходовали Вова и Дима вместе. Во сколько раз дольше Димы играл на планшете Вова?
2. Цифры x, y, z таковы, что $2z = 3x + y$. Докажите, что трехзначное число \overline{xyz} делится на 7.
3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH . В треугольнике AHC проведена высота HK . Оказалось, что $KA = CH$. Докажите, что BK – биссектриса угла ABC .
4. Даны натуральные числа m и n , наименьшее общее кратное которых – точный квадрат. Докажите, что найдется такой общий делитель d чисел m и n , что $\frac{m}{d}$ – точный квадрат.
5. В каждой клетке таблицы $n \times n$ стоит “+” или “-”. Разрешено выполнять следующую операцию: выбрать какую-то клетку и поменять знаки во всех клетках строки и столбца, проходящих через выбранную клетку (знак в выбранной клетке меняется один раз). Можно ли наверняка при любом начальном расположении знаков в таблице несколькими операциями получить во всех клетках знак “+”, если а) $n = 10$; б) $n = 11$?