

11 класс

1. Решите уравнение $9^{x+2} + 4^{y-2} - 2 \cdot 3^{x+3} - 2^{y-1} + 10 = 0$.

2. Найдите натуральные числа a , b и простое число p , удовлетворяющие равенству: $\frac{1}{p} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

3. В некоторых клетках полоски 1×100 стоят фишки. В каждой из пустых клеток написано число, равное модулю разности числа фишек слева и справа от нее. Какое наименьшее число фишек может стоять в клетках полоски, если известно, что все записанные числа положительны и различны? Ответ обоснуйте.

4. Парно различные положительные числа a , b , c таковы, что

$$\frac{a+b}{b-c} + \frac{b+c}{c-a} + \frac{c+a}{a-b} \leq \frac{b-c}{a+b} + \frac{c-a}{b+c} + \frac{a-b}{c+a}.$$

Докажите, что $\frac{a+c}{c-b} + \frac{b+a}{a-c} + \frac{c+b}{b-a} \geq 3$.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω . Прямые AD и BC пересекаются в точке E . Точки M и N выбраны на отрезках AD и BC соответственно так, что $AM : MD = BN : NC$. Описанная окружность треугольника EMN пересекает окружность ω в точках X и Y . Докажите, что прямые AB , CD и XY пересекаются в одной точке или параллельны.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

На выполнение заданий отводится 3,5 часа.

Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими электронными устройствами запрещается.

Результаты можно узнать по тел. 707-52-70 (начиная с 23 октября).

Апелляция состоится 24 октября с 13³⁰ до 15⁰⁰ в ауд. 6-52.

Условия и решения задач олимпиады можно будет найти в интернете по адресу sites.google.com/site/kharkivolimp/

11 клас

1. Розв'яжіть рівняння $9^{x+2} + 4^{y-2} - 2 \cdot 3^{x+3} - 2^{y-1} + 10 = 0$.

2. Знайдіть натуральні числа a , b та просте число p , що задовольняють рівність: $\frac{1}{p} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

3. У деяких комірках смужки 1×100 стоять фішки. У кожній порожній комірці записане число, що дорівнює модулю різниці кількості фішок, що знаходяться ліворуч та праворуч від неї. Яке найменше число фішок може стояти в комірках смужки, якщо відомо, що всі записані числа додатні та різні? Відповідь обґрунтуйте.

4. Парно різні додатні числа a , b , c є такими, що

$$\frac{a+b}{b-c} + \frac{b+c}{c-a} + \frac{c+a}{a-b} \leq \frac{b-c}{a+b} + \frac{c-a}{b+c} + \frac{a-b}{c+a}.$$

Доведіть, що $\frac{a+c}{c-b} + \frac{b+a}{a-c} + \frac{c+b}{b-a} \geq 3$.

5. Чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло ω . Прямі AD та BC перетинаються в точці E . Точки M та N вибрано на відрізках AD та BC відповідно так, що $AM : MD = BN : NC$. Описане коло трикутника EMN перетинає коло ω у точках X та Y . Доведіть, що прямі AB , CD та XY перетинаються в одній точці або паралельні.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.

На виконання завдань відводиться 3,5 години.

Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

Результати можна дізнатися за тел. 707-52-70 (починаючи з 23 жовтня).

Апелляція відбудеться 24 жовтня з 13³⁰ до 15⁰⁰ в ауд. 6-52.

Умови та розв'язки задач олімпіади можна буде знайти в інтернеті за адресою sites.google.com/site/kharkivolimp/