

Второй (городской в г. Харькове) этап Всеукраинской олимпиады школьников по математике, 2012

11 класс

1. Решите уравнение

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{27})(1 + x + x^2 + \dots + x^{63}) = (1 + x + x^2 + \dots + x^{45})^2.$$

2. Владислав Петрович ездит на машине со скоростью 120 км/ч. Однако, проезжая мимо поста ДПС (в любом из направлений), он замедляется и до ближайшего перекрестка едет со скоростью 60 км/ч. Расстояние между перекрестками A и B равно 60 км, и на пути между ними расположено еще 11 перекрестков. Докажите, что можно расставить на этом пути 6 постов ДПС так, чтобы дорога от A до B и обратно заняла у Владислава Петровича не менее 1 часа 15 минут. Располагать пост на перекрестке не разрешается.

3. Найдите все такие пары простых чисел (p, q) , что оба числа $p^2 + q^3$ и $p^3 + q^2$ являются точными квадратами.

4. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается его сторон BC , CA и AB в точках D , E и F соответственно. Точка G выбрана на ω таким образом, что FG – диаметр. Прямые EG и FD пересекаются в точке H . Докажите, что $AB \parallel CH$.

5. В школе учатся 360 девочек. Каждый мальчик в школе дружит ровно с тремя девочками, а каждая девочка дружит ровно с пятью девочками. При этом для любых двух дружащих друг с другом девочек есть хотя бы один мальчик, который дружит с ними обеими. Какое наименьшее количество мальчиков может учиться в этой школе?