Второй (городской в г. Харькове) этап Всеукраинской олимпиады школьников по математике, 2012

10 класс

1. Найдите все такие пары действительных чисел (a, b), что $a+b=1$ и выполнено равенство $(a^2+b^2)(a^3+b^3)=a^4+b^4$.

2. В клетках квадратной таблицы со стороной 2012 расставлены целые числа. Раз в минуту число в каждой клетке заменяется на сумму всех 4022 чисел, стоящих в одной строке или одном столбце с этой клеткой (само число в эту сумму не входит). Может ли через некоторое время сумма всех чисел в таблице оказаться равной 201220122012?

3. Докажите, что если $u, v \geqslant \dfrac{1}{2}$, то выполняется неравенство

$$u^2v^2+2(u+v) \geqslant 4uv+1.$$

4. В остроугольном треугольнике ABC на сторонах AC и BC выбраны такие точки D и E, что точки A, B, E и D лежат на одной окружности. Окружность, описанная вокруг треугольника DEC, пересекает сторону AB в точках X и Y. Докажите, что середина отрезка XY является основанием высоты треугольника, опущенной из точки C.

5. Множество различных натуральных чисел называется равномерным, если после удаления любого из его элементов остальные можно распределить по двум подмножествам с одинаковой суммой элементов. Найдите наименьшее натуральное $n>1$, для которого существует равномерное множество из n элементов.