

Второй (городской в г. Харькове) этап Всеукраинской олимпиады школьников по математике, 2012

9 класс

1. Приведите пример трех различных целых чисел, одно из которых равно сумме двух оставшихся, а другое – произведению двух оставшихся.

2. Между городами A и B ездят автобусы с одинаковыми постоянными скоростями. Автобус, выехавший из A в 9:00, и автобус, выехавший из B в 13:00, встретились на расстоянии 600 км от A . Автобус, выехавший из A в 16:00, и автобус, выехавший из B в полдень, встретились на расстоянии 300 км от A . На каком расстоянии от A встретятся автобусы, выехавшие из A и B в 14:00?

3. Докажите, что для любого $a > 1$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} < \frac{1}{a-1}.$$

4. В треугольнике ABC точки P и Q – точки пересечения прямой, параллельной BC и проходящей через вершину A , с биссектрисами внешних углов B и C треугольника соответственно. Перпендикуляр к прямой BP , восставленный в точке P , и перпендикуляр к прямой CQ , восставленный в точке Q , пересекаются в точке R . Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC . Докажите, что $AI = AR$.

5. Аня располагает на клетчатой доске $n \times n$ доминошки (каждая доминошка занимает ровно две клетки доски) так, чтобы они не имели общих точек (доминошки не могут даже касаться друг друга). При каком наименьшем n Ане удастся расположить доминошки так, чтобы они покрыли ровно 2012 клеток доски?