

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2017 год. 10 класс. 3 тур

1. У Саши есть таблица 50×50 . Около каждой строчки и около каждого столбика он записывает по действительному числу. Все 100 записанных чисел различны и ровно 50 из них рациональны. После этого, Саша в каждую клетку таблицы записывает сумму тех двух чисел, которые написаны около строчки, в которой она находится, и около столбика, в котором она находится. Какое наибольшее количество чисел, записанных в клетках таблицы, могут быть рациональными?

2. Найдите все натуральные n такие, что число $(n^2 + 11n - 4) \cdot n! + 33 \cdot 13^n + 4$ является квадратом целого числа.

3. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ стороны AD и BC не параллельны. Точка P – середина стороны AD . Точка T выбрана внутри четырехугольника $ABCD$ так, что $BT = CT = AP$. Докажите, что прямые AD , BC и серединный перпендикуляр к отрезку PT имеют общую точку.

4. Несколько школьников участвовали в олимпиаде “Коала”. За каждую задачу участник мог получить 1 балл, если его ответ правильный, и 0 баллов, если ответ неправильный. Организаторы олимпиады заметили, что с каждой задачей справился по крайней мере один из школьников. Также известно, что есть два участника, набравшие разное количество баллов. Докажите, что найдется задача, для которой выполнено следующее: среднее количество баллов, которые набрали участники, решившие эту задачу, больше, чем среднее количество баллов участников, эту задачу не решивших.