

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2017 год. 9 класс. 3 тур

1. Даня написал на доске несколько натуральных чисел (возможно всего одно число). Каждую минуту Миша дописывает на доску число, равное сумме квадратов тех чисел, которые к этому моменту на ней уже записаны. Докажите, что 2017-е число, выписанное Мишей на доску, будет иметь по крайней мере 2016 различных простых делителей.
2. Денис выписывает в тетрадку пары различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 2017. Он хочет, чтобы для любых двух выписанных пар одна из них состояла из двух наименьших элементов их объединения (объединение пар (1,2) и (3,4) – это набор (1, 2, 3, 4); объединение пар (1,2) и (1,3) – это набор (1, 2, 3)). Какое наибольшее число различных пар он сможет выписать?
3. В прямоугольном равнобедренном треугольнике ABC на гипотенузе BC выбрана точка M такая, что $\angle AMB = 75^\circ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка F , лежащая на биссектрисе угла CAM , так, что $BF = AB$. Докажите, что треугольник CFM – равнобедренный.
4. В ряд выписаны 125 попарно различных натуральных чисел так, что среди любых трех чисел, записанных подряд, второе число больше, чем среднее арифметическое первого и третьего. Какое минимальное значение может принимать наибольшее из этих чисел?