

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2017 год. 8 класс. 3 тур

1. Найдите все пары простых чисел p и r , удовлетворяющих равенству: $2^p = 1999 + r^2$.
2. Числа a, b, c – различные и ненулевые. Может ли оказаться, что среди чисел

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}, \quad \frac{b+c}{b^2+bc+c^2}, \quad \frac{c+a}{c^2+ca+a^2}$$

есть ровно два равных?

3. Сто хулиганов вышли на уличный бой. У каждого из них была рогатка и 75 орехов. Они стреляли из рогатки орехами друг в друга. По окончании боя выяснилось, что все орехи израсходованы, ни один из хулиганов не промазал, и никто ни в кого не попал дважды. Докажите, что найдутся три хулигана, каждый из которых попал из рогатки в двух других.
4. Точка O – центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружности γ_1 и γ_2 описаны около треугольников ABO и ACO соответственно. Точки P и Q выбраны на окружностях γ_1 и γ_2 соответственно так, что OP – диаметр γ_1 , а OQ – диаметр γ_2 . Обозначим T точку пересечения касательной к окружности γ_1 в точке P и касательной к окружности γ_2 в точке Q . Пусть D – вторая точка пересечения прямой AC и окружности γ_1 . Докажите, что точки D, O и T лежат на одной прямой.