Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2016 год. 11 класс. 3 тур

1. По кругу стоят 40 участников отбора на Всеукраинскую олимпиаду. Будем говорить, что участник – *верзила*, если двое участников, которые стоят следом за ним по часовой стрелке, ниже его. Будем говорить, что участник – *мелкий*, если двое участников, стоящие перед ним по часовой стрелке, выше его. Один и тот же участник может оказаться и верзилой и мелким одновременно. Оказалось, что верзил в кругу по крайней мере 30. Докажите, что в кругу найдется 20 мелких.

2. AK – биссектриса треугольника ABC. Точка P выбрана на отрезке CK. К описанной окружности треугольника ABC проведена касательная l, проходящая через точку A. Прямая l и луч CB пересекаются в точке Q. Касательные в точках A и P к описанной окружности треугольника AKP, пересекаются в точке T. Докажите, что прямая QT параллельна прямой AK.

3. Для простых чисел p и q нашлись такие натуральные m и n, что $1 + p + p^2 + \ldots + p^m$ – степень числа q с натуральным показателем, а $1+q+q^2+\ldots+q^n$ – степень числа p с натуральным показателем. Докажите, что одно из чисел p и q равно 2.

4. Докажите, что многочлен $P(x, y) = x^n+xy+y^n$ нельзя представить в виде $P(x, y) = G(x, y) \cdot H(x, y)$, где $G(x, y)$ и $H(x, y)$ – многочлены с действительными коэффициентами, отличные от константы.