

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2016 год. 10 класс. 3 тур

1. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – арифметические прогрессии. Рассмотрим m многочленов

$$P_1(x) = x^2 + a_1x + b_1,$$

$$P_2(x) = x^2 + a_2x + b_2,$$

...

$$P_m(x) = x^2 + a_mx + b_m.$$

Докажите, что если многочлены $P_1(x)$ и $P_m(x)$ не имеют действительных корней, то тогда и оставшиеся многочлены также не имеют действительных корней.

2. Даны натуральные числа m и n , причем $m < n$. Известно, что

$$\text{НОД}(n - m, nm + 1) = 1 \text{ и } \text{НОД}(n + m, nm - 1) = 1.$$

Докажите, что число $(n - m)^2 + (nm + 1)^2$ не является точным квадратом.

3. Из чисел $1, 2, 3, \dots, 6n - 1, 6n$ Олег выбрал набор из $4n$ попарно различных чисел ($n > 10$). Он ищет пары таких чисел (a, b) из своего набора, что a делится на b . Какое наибольшее количество пар сможет гарантированно найти Олег (найденные пары могут иметь общее число)?

4. В треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности. Точка P выбрана на высоте AH этого треугольника. Биссектриса угла BAC второй раз пересекает окружность, описанную около треугольника ABC , в точке D . Точка M – середина отрезка DP . Прямая, проходящая через точку O и параллельная прямой AD , пересекает прямую DP в точке N . Докажите, что $\angle BAM = \angle CAN$.