

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики

3 тур

8 клас

1. Для натуральних чисел a, b позначимо через $\overline{a,b}$ десятковий дріб, у якого a записане перед комою, а b – після коми. Наприклад, для $a = 303$, $b = 20$ маємо, що $\overline{a,b} = 303,2$, $\overline{b,a} = 20,303$. Знайдіть усі такі числа a, b , для яких $\overline{a,b} \cdot \overline{b,a} = 13$.
2. Нехай $ABCD$ – опуклий чотирикутник. Позначимо через $\gamma_{AB}, \gamma_{BC}, \gamma_{CD}, \gamma_{DA}$ кола, що побудовані на сторонах AB, BC, CD, DA відповідно як на діаметрах. Відомо, що кола γ_{AB} та γ_{CD} дотикаються між собою, а також кола γ_{BC} та γ_{DA} дотикаються між собою. Доведіть, що $ABCD$ – ромб.
3. На вечірку прийшло N людей. Кожні двоє з них або знайомі, або ні. Знайдіть найбільшу можливу кількість пар незнайомих людей, у яких є спільний знайомий.
4. Будемо називати натуральне число *гарним*, якщо воно дорівнює 1 або є добутком парної кількості (не обов'язково різних) простих чисел. Нехай $P(x) = (x-a)(x-b)$, де a та b - натуральні числа. Доведіть, що існують різні натуральні числа a, b такі, що всі числа $P(1), P(2), \dots, P(2014)$ - гарні.

*На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів*

23 лютого 2014 року