

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2017 год. 9 класс. 2 тур

1. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности, а точка D – основание высоты, опущенной из вершины A . Оказалось, что прямая OD параллельна биссектрисе внешнего угла при вершине A треугольника ABC . Докажите, что отрезок AD равен радиусу описанной окружности треугольника ABC .
2. Множество S – объединение конечного числа непересекающихся интервалов, каждый из которых содержится в отрезке $[0; 1]$. Известно, что никакие две точки из S не лежат на расстоянии $\frac{1}{10}$ друг от друга. Докажите, что суммарная длина интервалов, из которых состоит S , не превосходит $\frac{1}{2}$.
3. Натуральное число называется *сложенным*, если у него есть хотя бы два различных простых делителя, и оно делится на сумму любых двух своих различных простых делителей. Найдите все четырехзначные сложенные числа.
4. На доске написаны три числа. Разрешается заменять пару чисел a и b на пару $a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$ и $a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$. Докажите, что если изначально на доске были записаны числа 2, 3 и 9, то нам никогда не удастся получить число, меньшее 1.