Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики

2 тур

11 клас

1. Для натуральних чисел a, b позначимо через $\overline{a,b}$ десятковий дріб, у якого a записане перед комою, а b – після коми. Наприклад, для $a = 303$, $b = 20$ маємо, що $\overline{a,b} = 303{,}2$, $\overline{b,a} = 20{,}303$.

а) Знайдіть усі такі числа a, b, для яких $\overline{a,b} \cdot \overline{b,a} = 13$.

б) Доведіть, що існує нескінченно багато таких натуральних n, для яких рівняння $\overline{a,b} \cdot \overline{b,a} = n$ має розв'язки в натуральних числах a, b.

2. У трикутнику ABC $AB \neq AC$, точка M – середина дуги BC описаного кола ΔABC, що містить точку A. Вписане у ΔABC коло з центром у точці I дотикається сторони BC у точці D. Пряма, що паралельна AI та проходить через точку D перетинає вписане коло вдруге в точці P. Доведіть, що прямі AP та IM перетинаються в точці, що лежить на описаному колі.

3. Кожна з 22 множин містить 5 елементів. Перетин будь-яких двох з цих множин містить рівно 2 елементи. Доведіть, що перетин усіх множин так само містить рівно 2 елементи.

4. Функція $f : Z^+ \to Z^+$ для кожного $n \in Z^+$ задовольняє такі умови:

- $(f(2n+1))^2 - (f(2n))^2 = 6f(n) + 1$;
- $f(2n) \geq f(n)$.

Розв'яжіть рівняння $f(n) = 1000$. *(Тут* Z^+ *позначено множину цілих невід`ємних чисел.)*

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

23 лютого 2014 року