

# *Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики*

## 2 тур

### 10 клас

1. Для натуральних чисел  $a, b$  позначимо через  $\overline{a,b}$  десятковий дріб, у якого  $a$  записане перед комою, а  $b$  – після коми. Наприклад, для  $a = 303$ ,  $b = 20$  маємо, що  $\overline{a,b} = 303,2$ ,  $\overline{b,a} = 20,303$ .

*a)* Знайдіть усі такі числа  $a, b$ , для яких  $\overline{a,b} \cdot \overline{b,a} = 13$ .

*б)* Доведіть, що існує нескінченно багато таких натуральних  $n$ , для яких рівняння  $\overline{a,b} \cdot \overline{b,a} = n$  має розв'язки в натуральних числах  $a, b$ .

2. Точка  $I$  – інцентр рівностороннього трикутника  $ABC$ , промінь  $AI$  вдруге перетинає описане коло  $\Delta ABC$  у точці  $D$ . Коло, що проходить через точки  $C, D, I$ , вдруге перетинає промінь  $BI$  у точці  $K$ . Доведіть, що  $BK = CK$ .

3. Кожна з 22 множин містить 5 елементів. Перетин будь-яких двох з цих множин містить рівно 2 елементи. Доведіть, що перетин усіх множин так само містить рівно 2 елементи.

4. Для яких раціональних чисел  $r$  є вірним твердження: якщо  $x$  дійсне число, для якого вирази  $x^2 - rx$  та  $x^3 - rx$  приймають раціональні значення, то  $x$  також раціональне число?

*На виконання завдання відводиться 4 години*

*Кожна задача оцінюється в 7 балів*

23 лютого 2014 року