

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики

2 тур

9 клас

1. Для натуральних чисел a, b позначимо через $\overline{a,b}$ десятковий дріб, у якого a записане перед комою, а b – після коми. Наприклад, для $a = 303$, $b = 20$ маємо, що $\overline{a,b} = 303,2$, $\overline{b,a} = 20,303$.

а) Знайдіть усі такі числа a, b , для яких $\overline{a,b} \cdot \overline{b,a} = 13$.

б) Доведіть, що існує нескінченно багато таких натуральних n , для яких рівняння $\overline{a,b} \cdot \overline{b,a} = n$ не має розв'язків в натуральних числах a, b .

2. Точка I – інцентр різностороннього трикутника ABC , промінь AI вдруге перетинає описане коло ΔABC у точці D . Коло, що проходить через точки C, D, I , вдруге перетинає промінь BI у точці K . Доведіть, що $BK = CK$.

3. У країні Лапландії усього є 100 міст. Кожні два з них або з'єднані єдиною дорогою, або взагалі безпосередньо не з'єднані. Відомо, що якщо вибрати будь-які 98 міст, то загальна кількість доріг, що існують між цими 98 містами дорівнює сталій величині, що не залежить від вибору цих 98 міст. Які значення може приймати N – загальна кількість доріг у Лапландії?

4. Для яких раціональних чисел r є вірним твердження: якщо x дійсне число, для якого вирази $x^2 - rx$ та $x^3 - rx$ приймають раціональні значення, то x також раціональне число?

На виконання завдання відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

23 лютого 2014 року