

**Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2013 год. 11 класс. 2 тур**

1. Прямоугольный треугольник вписан в параболу  $y = x^2$ . Докажите, что его гипотенуза не меньше 2.
2. Дан квадрат  $ABCD$ . Рассмотрим все правильные треугольники  $KLM$  такие, что точки  $K$ ,  $L$  и  $M$  лежат на сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  соответственно. Докажите, что все отрезки  $KM$  проходят через фиксированную точку.
3. В шахматном турнире участвовало 20 шахматистов. Каждый сыграл с каждым ровно одну партию. Известно, что если партия между шахматистами  $A$  и  $B$  закончилась ничьей, то каждый из остальных 18 игроков выиграл по крайней мере у одного из  $A$  и  $B$ . Известно также, что по крайней мере две партии закончились ничьей. Докажите, что можно обозначить игроков  $P_1, P_2, \dots, P_{20}$  таким образом, что  $P_k$  выиграл у  $P_{k+1}$  для каждого  $k$  от 1 до 19.
4. Пусть  $p = 4k + 3$  – простое число, а  $\frac{m}{n}$  – такая несократимая дробь, что

$$\frac{1}{0^2 + 1} + \frac{1}{1^2 + 1} + \dots + \frac{1}{(p-1)^2 + 1} = \frac{m}{n}.$$

Докажите, что  $2m - n$  делится на  $p$ .