Відбір команди України на 57-му міжнародну математичну олімпіаду, 2016

I тур

1. Полем гри є вершини правильного $6n+3$-кутника, які за рухом годинникової стрілки перенумеровані числами $1; 2; ...; 6n+3$. Вершини з номерами $2n+1; 4n+2; 6n+3$ називаються лунками. На початку гри на полі розташовані 3 фішки. Два гравці по черзі вибирають будь-яку з трьох фішок та пересувають її у сусідню вершину за рухом годинникової стрілки, якщо та не зайнята іншою фішкою. Перший гравець перемагає, якщо принаймні дві з фішок після ходу будь-якого з гравців попадають у лунки. Чи завжди перший гравець може перемогти, якщо на початку гри вони розставлені у вигляді правильного трикутника?

2. Знайдіть усі функції $f: \mathrm{Z}^+ \to \mathrm{Z}^+$ такі, що рівність

$$f(a+b) = f(a) + f(b) + f(c) + f(d)$$

виконується для довільних $a, b, c, d \in \mathrm{Z}^+$ таких, що $2ab = c^2 + d^2$.

3. Задано трикутник ABC, у якому $CA \neq CB$. Нехай D, F і G — середини сторін AB, AC і BC відповідно. Коло Γ, що проходить через точку C і дотикається до сторони AB в точці D, перетинає відрізки AF і BG в точках H та I відповідно. Точки H' і I' симетричні H та I відносно F і G відповідно. Пряма $H'I'$ перетинає CD і FG в точках Q і M відповідно. Пряма CM вдруге перетинає Γ в точці P. Доведіть, що $CQ = QP$.