Відбір команди України на 57-му міжнародну математичну олімпіаду, 2016

IV тур

10. Задано натуральне число n і дійсні числа a_1, …, a_n. Позначимо

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k x^k \text{ і } g(x)=\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k-1} x^k .$$

Припустимо, що $g(2016)=0$. Доведіть, що f має корінь на інтервалі $(0,2016)$.

11. Задано трикутник ABC у якого $\angle C=90°$, точка H — основа висоти, що проведена з точки C. Точка D вибрана всередині трикутника CBH таким чином, що CH ділить відрізок AD навпіл. Позначимо точку перетину BD і CH через P. Нехай ω — півколо, що побудоване на BD як на діаметрі і перетинає відрізок CB у його внутрішній точці. Пряма, що проходить через точку P, дотикається до ω в точці Q. Доведіть, що прямі CQ і AD перетинаються на ω.

12. Припустимо, що $a_0, a_1, \ldots$ і $b_0, b_1, \ldots$ — дві послідовності натуральних чисел, що задовольняють умови $a_0, b_0 \geq 2$ і

$$a_{n+1}=НСД(a_n,b_n)+1,\ b_{n+1}=НСК(a_n,b_n)-1,$$

для довільного $n \geq 0$. Доведіть, що послідовність (a_n) стає періодичною починаючи з деякого моменту; іншими словами, існують цілі числа $N \geq 0$ і $t > 0$ такі, що $a_{n+t}=a_n$ для довільного $n \geq N$.