

**Відбір команди України на 57-му міжнародну математичну олімпіаду,  
2016**

**II тур**

4. Знайдіть всі натуральні значення  $a$  такі, що число  $a^n - n^a$  при довільному натуральному  $n$  ділиться на  $2^n - n^2$ .

5. У вершинах правильного трикутника  $ABC$  зі стороною 1 розташовано три коника. В довільний момент часу, рівно один з коників може стрибнути через іншого так, що відстань, яку пролетить коник, буде дорівнювати початковій відстані між ними помноженій на деяке парне число. На променях  $AB$  і  $AC$  обрано точки  $M$  і  $N$  так, що  $AM = AN = l$ , де  $l$  — деяке натуральне число. Через скінчену кількість стрибків виявилось, що три коники знаходяться в трикутнику  $AMN$  (всередині або на його межі) після чого стрибки більше не відбувались. Знайдіть кількість фінальних позицій, на яких можуть опинитися коники. (Підчас стрибків, коники можуть опинятися за межами трикутника  $AMN$ .)

6. Задано натуральне число  $n$ . Знайдіть найбільше значення, якого може набувати сума  $\sum_{1 \leq r < s \leq 2n} (s - r - n)x_r x_s$ , при  $-1 \leq x_i \leq 1$  для довільного  $i = 1, 2, \dots, 2n$ .