Відбір команди України на 57-му міжнародну математичну олімпіаду, 2016

III тур

7. Задано натуральні числа m і n такі, що $m > n$. Позначимо $x_k = (m+k)/(n+k)$, при $k = 1, 2, ..., n+1$. Доведіть, що якщо x_1, x_2, …, x_{n+1} — натуральні числа, то число $x_1 x_2 ... x_{n+1} - 1$ має непарний простий дільник.

8. Задано гострокутний трикутник ABC, у якому $AB < BC$. Його вписане коло з центром в точці I дотикається до сторони BC в точці K. Пряма AK вдруге перетинає описане коло трикутника ABC в точці T. Нехай M — середина BC, а N — середина дуги BAC описаного кола трикутника ABC. Відрізок NT перетинає описане коло трикутника BIC в P. Доведіть, що $PM \parallel AK$.

9. Задано натуральне число n. Двоє гравців А та Б грають у гру за такими правилами:

a) Гравці по черзі обирають деяке натуральне число $k \le n$.
b) Не можна обирати число, яке було обрано раніше.
c) Гравець не може вибрати число, якщо ним вже було обрано сусіднє до цього числа.
d) Гра закінчується внічию, якщо було використано всі числа; в протилежному випадку, програє той гравець, що не може зробити наступний хід.

Гравець А ходить першим. Визначте результат гри, якщо обидва гравці грають за оптимальною стратегією.