Второй (городской в г. Харькове) этап Всеукраинской олимпиады школьников по математике. 16 октября 2016 года

11 класс

1. Несколько детей построили на берегу моря песчаный замок. На следующий день, придя на берег, дети обнаружили, что замок смыло во время прилива. Они позвали своего друга и построили такой же замок, как и накануне, но теперь на 20 минут быстрее. На следующий день замок снова смыло, и они позвали ещё четырех друзей строить новый замок. На этот раз они справились ещё на 40 минут быстрее. Сколько детей строило замок в первый день? Ответ обоснуйте.

2. Докажите, что для любых α, β и γ хотя бы одно из чисел $\sin\alpha\cdot\cos\beta$, $\sin\beta\cdot\cos\gamma$, $\sin\gamma\cdot\cos\alpha$ не превосходит $\dfrac{1}{2}$.

3. Натуральные числа a и b таковы, что $\dfrac{a+1}{b}+\dfrac{b+1}{a}$ – целое число. Докажите, что наибольший общий делитель чисел a и b не превосходит $\sqrt{a+b}$.

4. У художника Тюбика есть выпуклый девятиугольник. Он хочет провести в нем несколько диагоналей так, чтобы на рисунке не появился треугольник, вершины которого расположены в вершинах исходного девятиугольника, а все стороны – какие-то из проведенных диагоналей. Какое максимальное количество диагоналей сможет провести Тюбик? Ответ обоснуйте.

5. Окружность ω проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает его стороны AC и AB в точках D и E соответственно. На луче BD выбрана такая точка K, что $BK=AC$, а на луче CE – такая точка L, что $CL=AB$. Докажите, что центр O описанной окружности треугольника AKL лежит на окружности ω.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.
На выполнение заданий отводится 3,5 часа.
Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими электронными устройствами запрещается.

Результаты можно узнать по тел. 707-52-70 (начиная с 18 октября).
Апелляция состоится 20 октября с 16^{00} до 17^{30} в ауд. 6-52.
Условия и решения задач олимпиады можно будет найти в интернете по адресу `sites.google.com/site/kharkivolimp/`

Другий (міський в м. Харкові) етап Всеукраїнської олімпіади школярів з математики. 16 жовтня 2016 року

11 клас

1. Декілька дітей побудували на березі моря замок з піску. Наступного дня, коли діти прийшли на берег, вони побачили, що замок було змито приливом. Тоді діти покликали свого друга і побудували такий самий замок, як і напередодні, але тепер на двадцять хвилин швидше. Наступного дня замок знов змило, і діти покликали ще чотирьох друзів будувати новий замок. Цього разу вони впоралися ще на 40 хвилин швидше. Яка кількість дітей будувала замок у перший день? Відповідь обґрунтуйте.

2. Доведіть, що для будь-яких α, β і γ хоча б одне з чисел $\sin\alpha\cdot\cos\beta$, $\sin\beta\cdot\cos\gamma$, $\sin\gamma\cdot\cos\alpha$ не перевищує $\dfrac{1}{2}$.

3. Натуральні числа a та b такі, що $\dfrac{a+1}{b}+\dfrac{b+1}{a}$ – ціле число. Доведіть, що найбільший спільний дільник чисел a та b не перевищує $\sqrt{a+b}$.

4. У художника Тюбика є опуклий дев'ятикутник. Він хоче провести в ньому декілька діагоналей таким чином, щоб на малюнку не з'явився трикутник, вершини якого розташовані у вершинах початкового дев'ятикутника, а всі сторони – деякі з проведених діагоналей. Яку максимальну кількість діагоналей зможе провести Тюбик? Відповідь обґрунтуйте.

5. Коло ω проходить через вершини B та C трикутника ABC і перетинає його сторони AC та AB у точках D та E відповідно. На промені BD обрано таку точку K, що $BK=AC$, а на промені CE – таку точку L, що $CL=AB$. Доведіть, що центр O описаного кола трикутника AKL належить колу ω.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.
На виконання завдань відводиться 3,5 години.
Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

Результати можна дізнатися за тел. 707-52-70 (починаючи з 18 жовтня).
Апеляція відбудеться 20 жовтня з 16^{00} до 17^{30} в ауд. 6-52.
Умови та розв'язки задач олімпіади можна буде знайти в інтернеті за адресою `sites.google.com/site/kharkivolimp/`