

**Відбір команди України на 56-ту міжнародну математичну олімпіаду,  
2015**

**IV тур**

**10.** Знайдіть всі пари натуральних чисел  $(x, y)$  таких, що виконується рівність

$$\sqrt[3]{7x^2 - 13xy + 7y^2} = |x - y| + 1.$$

**11.** Задано гострокутний трикутник  $ABC$ , у якого  $AB > BC$ . Нехай  $\omega$  — описане коло трикутника  $ABC$ , а  $O$  — центр  $\omega$ . Бісектриса кута  $ABC$  перетинає  $\omega$  в точці  $M \neq B$ . Нехай  $\gamma$  — коло з діаметром  $BM$ . Бісектриси кутів  $AOB$  і  $BOC$  перетинають коло  $\gamma$  в точках  $P$  і  $Q$  відповідно. На прямій  $PQ$  обрано точку  $R$  так, що  $BR = MR$ . Доведіть, що  $BR \parallel AC$ . (В умові вважаємо, що бісектриса це промінь.)

**12.** Для заданого натурального  $n$  розглянемо множину  $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$ , яка складається хоча б з  $\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$  елементів. Доведіть, що при  $n \geq 2015$  множина  $A$  містить трьохелементну арифметичну послідовність.