Відбір команди України на 56-ту міжнародну математичну олімпіаду, 2015

II тур

4. Задано просте число $p>3$. Доведіть, що натуральні числа, які менші за p, можна розбити на дві непорожні множини таким чином, що сума чисел в першій множині буде конгруентною за модулем p добутку чисел в другій множині.

5. Для довільної послідовності x_1, x_2, …, x_n, яка складається з дійсних чисел, будемо називати її *коштом* число $\max\limits_{1\le i\le n}|x_1+x_2+\ldots+x_i|$.

З заданих n дійсних чисел, Андрій і Юра хочуть утворити послідовність, яка має малий кошт. Андрій перебирає всі можливі послідовності і вибирає з них ту, кошт D якої мінімальний. Юра, в свою чергу, вибирає спочатку x_1 так, що величина $|x_1|$ мінімальна, далі з решти чисел обирає x_2 так, що величина $|x_1+x_2|$ набуває найменшого значення і так далі. Іншими словами, на i-ому кроці Юра вибирає x_i з чисел, які ще не використовувалися, і величина $|x_1+x_2+\ldots+x_i|$ мінімальна. На кожному кроці, якщо існують декілька чисел, для яких досягається мінімальне значення, Юра вибирає довільне з них. Для побудованої послідовності Юра підраховує її кошт G.

Знайдіть найменше значення константи c такої, що для довільного натурального n, для довільних n дійсних чисел x_1, x_2, …, x_n і для довільної послідовності, яку може отримати Юра, виконується нерівність $G\le cD$.

6. Задано гострокутний трикутник ABC, H — основа висоти, проведеної з точки A на пряму BC, P і $K\ne H$ — довільні точки на відрізках AH і BC відповідно. Прямі AC і BP перетинаються в точці B_1, прямі AB і CP в точці C_1. Нехай X і Y — проекції точки H на прямі KB_1 і KC_1 відповідно. Доведіть, що точки A, P, X і Y лежать на одному колі.