9 класс

1. Пусть a и b – различные положительные числа. Известно, что $a^2+b^2=3ab$. Найдите $\dfrac{a+b}{a-b}$. Ответ обоснуйте.

2. Существуют ли два натуральных числа таких, что их сумма равна 2015, а произведение делится нацело на 2015? Ответ обоснуйте.

3. Докажите, что для любых x и y, удовлетворяющих условию $xy+x+y=1$, выполнено неравенство

$$x^2y^2+x+y\geq 5xy.$$

4. Дан правильный 2016-угольник; 1008 его вершин покрашены в синий цвет, остальные – в жёлтый. Все попарные расстояния между жёлтыми точками выписали в неубывающем порядке (некоторые числа могли оказаться выписаными несколько раз). То же самое сделали с попарными расстояниями между синими точками. Докажите, что две получившиеся последовательности совпадают.

5. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках P и Q, находятся внутри окружности ω и касаются её в точках A_1 и A_2 соответственно. Прямая PQ пересекает окружность ω в точках B и D. Пусть E_1 и F_1 – вторые точки пересечения прямых A_1B и A_1D с ω_1, а E_2 и F_2 – вторые точки пересечения A_2B и A_2D с ω_2. Докажите, что точки E_1, E_2, F_1 и F_2 лежат на одной окружности.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.
На выполнение заданий отводится 3,5 часа.
Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами
и другими электронными устройствами запрещается.

Результаты можно узнать по тел. 707-52-70 (начиная с 20 октября).
Апелляция состоится 21 октября с 15^{30} до 17^{00} в ауд. 6-52.
Условия и решения задач олимпиады можно будет найти в интернете
по адресу `sites.google.com/site/kharkivolimp/`

9 клас

1. Нехай a та b – різні додатні числа. Відомо, що $a^2+b^2=3ab$. Знайдіть $\dfrac{a+b}{a-b}$. Відповідь обгрунтуйте.

2. Чи існують два натуральні числа такі, що їхня сума дорівнює 2015, а їхній добуток ділиться націло на 2015? Відповідь обґрунтуйте.

3. Доведіть, що для довільних x та y, які задовольняють умову $xy+x+y=1$, виконується нерівність

$$x^2y^2+x+y\geq 5xy.$$

4. Дано правильний 2016-кутник; 1008 його вершин пофарбовані у синій колір, а усі решта – в жовтий. Усі попарні відстані між жовтими точками виписали у неспадаючому порядку (деякі числа могли бути виписані декілька разів). Те ж саме зробили з попарними відстанями між синіми точками. Доведіть, що дві отримані послідовності співпадають.

5. Кола ω_1 і ω_2 перетинаються у точках P і Q, знаходяться всередині кола ω та дотикаються до нього в точках A_1 і A_2 відповідно. Пряма PQ перетинає коло ω в точках B і D. Нехай E_1 і F_1 – другі точки перетину прямих A_1B і A_1D з ω_1, а E_2 і F_2 – другі точки перетину A_2B і A_2D з ω_2. Доведіть, що точки E_1, E_2, F_1 і F_2 належать одному колу.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.
На виконання завдань відводиться 3,5 години.
Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами
та іншими електронними пристроями забороняється.

Результати можна дізнатися за тел. 707-52-70 (починаючи з 20 жовтня).
Апеляція відбудеться 21 жовтня з 15^{30} до 17^{00} в ауд. 6-52.
Умови та розв'язки задач олімпіади можна буде знайти в інтернеті
за адресою `sites.google.com/site/kharkivolimp/`