Третій тур

7. У соціальній мережі «Граф» зареєстровано 2013 користувачів. Деякі користувачі є друзями, причому дружба у «Графі» взаємна. Відомо, що серед користувачів мережі не знайдеться трьох, кожні два з яких дружили б між собою. Знайдіть найбільшу можливу кількість пар друзів у «Графі».

8. Відомо, що сторони *AB* та *AC* трикутника *ABC* мають різну довжину. Нехай точка *O* — центр описаного кола, а відрізок *AD* — бісектриса трикутника. Точка *E* симетрична точці *D* відносно середини сторони *BC*. Пряма, перпендикулярна до *BC*, що проходить через точку *D*, перетинає пряму *AO* в точці *X*, а пряма, перпендикулярна до *BC*, що проходить через *E*, перетинає пряму *AD* в точці *Y*. Доведіть, що *B*, *C*, *X* та *Y* лежать на одному колі.

9. Знайдіть усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, що для довільних дійсних чисел *x* та *y* задовольняють співвідношення

$$f^2(x+y)=f^2(x)+2f(xy)+f^2(y).$$

Четвертий тур

10. Нехай *X* та *Y* — деякі числові множини. Запровадимо позначення

$$X+Y=\{x+y \mid x\in X,\ y\in Y\}.$$

Інакше кажучи, $X+Y$ — множина, що складається з усіх чисел, які можна подати як суму числа з множини *X* і числа з множини *Y*.

Назвімо числову множину *S* *розби́вною*, якщо її можна розбити на три непорожні попарно неперетинні підмножини *A*, *B* та *C* (де $A\cup B\cup C=S$), для яких множи́ни $A+B$, $B+C$ і $C+A$ також є попарно неперетинними.

а) Чи є розбивною множина всіх цілих чисел?

б) Чи є розбивною множина всіх раціональних чисел?

11. Задано натуральне число *a*. Доведіть, що є нескінченна кількість простих чисел *p* таких, що при деякому натуральному *n* число $2^{2^n}+a$ ділиться на *p*.

12. На площині відмітили 4026 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. При цьому 2013 точок є вершинами опуклого многокутника, а інші 2013 точок лежать усередині цього многокутника. Дозволено пофарбувати кожну точку в один із двох кольорів. Розфарбування буде *гарним*, якщо деякі пари точок можна сполучити відрізками з дотриманням таких умов:

- Кожен відрізок сполучає точки однакового кольору.
- Жодні два проведені відрізки не перетинаються у своїх внутрішніх точках.
- Для довільної пари точок однакового кольору існує шлях по проведених відрізках від однієї точки до іншої.

Зверніть увагу, що сторони опуклого 2013-кутника не є автоматично проведеними відрізками, хоча деякі з них (або й усі) за потреби можна провести.

Доведіть, що загальна кількість гарних розфарбувань не залежить від конкретного розташування точок, і знайдіть цю кількість.