Відбір команди України
на 54-ту Міжнародну математичну олімпіаду

Умови задач

Перший тур

1. Навколо рівнобедреного трикутника ABC з основою BC описали коло. Відрізок AD — діаметр кола, а точка P лежить на меншій дузі BD. Пряма DP перетинає промені AB й AC в точках M та N, а прямі BP й CP перетинають пряму AD у точках Q та R. Доведіть, що середина відрізка MN лежить на описаному колі трикутника PQR.

2. Учитель повідомив Петрику непарне натуральне число $l \leqslant 2013$ і дав хлопцю домашнє завдання. Петрик має розставити зірочки в комірках таблиці 2013×2013 так, щоб справджувалася умова: якщо в деякій клітині таблиці стоїть зірочка, то або в рядку, або в стовпчику, де міститься ця клітинка, має стояти не більше ніж l зірочок (включно з даною). При цьому в кожну комірку таблиці хлопець може поставити щонайбільше одну зірочку. Вчитель пообіцяв Петрику, що його оцінка буде пропорційною кількості зірочок, які хлопцю вдасться розставити. Яку найбільшу кількість зірочок зможе розставити в таблиці Петрик?

3. Функцію $\mathrm{rad}: \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N}$ визначено таким чином:

- $\mathrm{rad}(0) = \mathrm{rad}(1) = 1;$
- якщо $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ — канонічний розклад натурального числа $n \geqslant 2$ на прості множники, то $\mathrm{rad}(n) = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$.

Знайдіть усі такі многочлени $f(x)$ із цілими невід'ємними коефіцієнтами, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ число $\mathrm{rad}(f(n^{\mathrm{rad}(n)}))$ націло ділиться на $\mathrm{rad}(f(n))$.

Другий тур

4. Назвімо *чарівною* множину A цілих чисел, що має таку властивість: якщо $x \in A$, $y \in A$ і k — довільне ціле число, то $x^2 + kxy + y^2 \in A$. Знайдіть усі пари $m \leqslant n$ цілих чисел, для яких єдиною чарівною множиною, що містить числа m і n водночас, є множина всіх цілих чисел.

5. Для додатних чисел x, y та z, які задовольняють умову $xyz = 1$, доведіть нерівність

$$\sqrt[3]{\frac{x+y}{2z}} + \sqrt[3]{\frac{y+z}{2x}} + \sqrt[3]{\frac{z+x}{2y}} \leqslant \frac{5(x+y+z)+9}{8}.$$

6. На площині позначили шість різних точок A, B, C, D, E, F. Жодні чотири з них не належать одному колу й жодні два відрізки із кінцями в цих точках не лежать на паралельних прямих. Нехай P, Q та R — точки перетину серединних перпендикулярів до пар відрізків (AD, BE), (BE, CF) та (CF, DA) відповідно, а P', Q' і R' — точки перетину серединних перпендикулярів до пар відрізків (AE, BD), (BF, CE) та (CA, DF) відповідно. Покажіть, що $P \neq P'$, $Q \neq Q'$, $R \neq R'$, і доведіть, що прямі PP', QQ' та RR' перетинаються в одній точці або є паралельними.