

## Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2017 год. 11 класс. 1 тур

1. Денис выписал на доске все натуральные числа от 1 до  $n$ . Потом Соня взяла и стерла одно из выписанных чисел. От горя Денис посчитал среднее арифметическое оставшихся на доске чисел и получил  $\frac{163}{4}$ . Какое число стерла Соня, если расстроенный Денис всегда считает правильно?
2. Точки  $A$  и  $B$  лежат на окружности  $\omega$ . Касательные к окружности, проведенные в точках  $A$  и  $B$ , пересекаются в точке  $C$ . Точка  $X$  симметрична  $A$  относительно точки  $B$ . Окружность  $\gamma$  описана около треугольника  $BXC$ . Окружности  $\gamma$  и  $\omega$  пересекаются в точке  $D \neq B$ , а прямая  $CD$  пересекает  $\omega$  в точке  $E \neq D$ . Докажите, что прямая  $EX$  касается окружности  $\gamma$ .
3. В каждую клетку доски  $9 \times 9$  Женья посадил по две дрессированные лягушки. По команде каждая лягушка прыгает в соседнюю по стороне клетку, причем лягушки, которые изначально сидели в одной клетке, прыгают в разные клетки. Какое наибольшее количество пустых клеток могло после этого получиться?
4. Дана последовательность  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  положительных вещественных чисел, удовлетворяющая условию

$$a_{k+1} \geq \frac{ka_k}{a_k^2 + (k-1)}$$

при всех натуральных  $k$ . Докажите, что  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$  при  $n \geq 2$ .