

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2017 год. 10 класс. 1 тур

1. Учитель написал на доске простое число. Школьники по очереди подходят к доске и прибавляют к написанному числу его последнюю цифру, а потом еще единицу. Затем стирают все с доски и записывают на нее полученный результат. Какое наибольшее количество первых чисел на доске могло оказаться простыми?
2. В треугольнике ABC на стороне BC выбраны точки A_1 и A_2 , на стороне CA – точки B_1 и B_2 , а на стороне AB – точки C_1 и C_2 так, что $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$. Оказалось, что у треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ совпадают центры тяжести. Докажите, что треугольник ABC – равносторонний.
3. Для положительных чисел x, y, z выполнено равенство $xyz = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{xy + x + 2} + \frac{1}{yz + y + 2} + \frac{1}{zx + z + 2} \leq \frac{3}{4}.$$

4. В каждую клетку доски 7×7 Женя посадил по две дрессированные лягушки. По команде каждая лягушка прыгает в соседнюю по стороне клетку, причем лягушки, которые изначально сидели в одной клетке, прыгают в разные клетки. Какое наибольшее количество пустых клеток могло после этого получиться?