

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2017 год. 9 класс. 1 тур

1. Для натурального числа n выписали все его натуральные делители: $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_s = n$. Докажите, что равенство

$$d_s - d_{s-1} + d_{s-2} - \dots + (-1)^{s-1} d_1 = n - 1$$

верно тогда и только тогда, когда n простое или $n = 4$.

2. Дано действительное число r . Последовательность $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ задана условиями $a_1 = 1$, $a_2 = r$ и

$$a_{n+1} = ra_n - a_{n-1}, \text{ при } n > 1.$$

а) Докажите, что при $n \geq 2$ многочлен $x^n - a_n x + a_{n-1}$ делится на многочлен $x^2 - rx + 1$.

б) Решите уравнение $x^4 - 56x + 15 = 0$.

3. В остроугольном треугольнике ABC , проведены высоты AD и CE . Через точку E параллельно BC проведена прямая l_1 , а через точку D параллельно AB – прямая l_2 . Прямая AC пересекает l_1 и l_2 в различных точках F и G соответственно. Точки K и L – основания перпендикуляров, опущенных из точки F на прямые DG и GE соответственно. KL пересекает ED в точке M . Докажите, что $FM \perp ED$.

4. В каждую клетку доски 8×8 Женья посадил по две дрессированные лягушки. По команде каждая лягушка прыгает в соседнюю по стороне клетку, причем лягушки, которые изначально сидели в одной клетке, прыгают в разные клетки. Какое наибольшее количество пустых клеток могло после этого получиться?