

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2015 год. 10 класс. 1 тур

1. Ростик и Валера играют в морской бой. Перед ними стоит тарелка с пирожками. Если в партии побеждает Ростик, то он съедает четверть всех имеющихся пирожков, а если Валера, то он съедает четыре пирожка. После нескольких игр оказалось, что ребята съели поровну пирожков и одержали равное количество побед. Сколько пирожков могло остаться не съеденными?

2. В треугольнике ABC через вершину A проведена прямая l , параллельная BC . Биссектрисы внешних углов треугольника при вершинах B и C пересекают прямую l в точках P и Q соответственно. Перпендикуляр к BP , восставленный в точке P , и перпендикуляр к CQ , восставленный в точке Q , пересекаются в точке R . Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC . Докажите, что $AI = AR$.

3. Найдите все пары непостоянных многочленов $p(x)$ и $q(x)$, если известно, что их старшие коэффициенты равны 1, степени равны n , каждый из них имеет n целых корней (не обязательно различных), и выполнено равенство $p(x) - q(x) = 1$.

4. Компания “Аэросвит” обслуживает прямые перелеты между некоторыми из 100 аэропортов (в обоих направлениях). Загруженностью аэропорта назовем количество аэропортов, с которыми он соединен прямыми рейсами компании “Аэросвит”. Новая компания “Аэропростир” открывает прямой рейс между двумя аэропортами тогда и только тогда, когда сумма их загруженностей хотя бы 100. Оказалось, что можно облететь все 100 аэропортов рейсами компании “Аэропростир”, залетая в каждый аэропорт ровно один раз, и вернуться в аэропорт, с которого начинали. Докажите, что можно совершить аналогичное путешествие, осуществляя все перелеты рейсами компании “Аэросвит”.