

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2014 год. 10 класс. 1 тур

1. Числа x, y, z таковы, что все три числа $x + yz, y + zx$ и $z + xy$ рациональны, а $x^2 + y^2 = 1$. Докажите, что число xyz^2 также рационально.
2. Треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O . Окружность, построенная на AO как на диаметре, пересекает описанную окружность треугольника OBC в точке S . Касательные к ω в точках B и C пересекаются в точке P . Докажите, что точки A, S и P лежат на одной прямой.
3. В сауне n комнат. Лица разного пола не могут находиться в одной комнате. Более того, мужчины могут находиться в одной комнате, лишь если они не знакомы, а женщины, наоборот, могут находиться в одной комнате, лишь если знакомы. В сауну пришли k супружеских пар. Известно, что мужчины знакомы в том и только том случае, когда знакомы их жены. При каком наибольшем k любые k таких пар заведомо можно разместить по комнатам?
4. Найдите все пары (p, n) , состоящие из простого числа p и натурального числа n , такие, что число $\frac{n^p + 1}{p^n + 1}$ – натуральное.