

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2013 год. 10 класс. 1 тур

1. Найдите все  $x$  и  $y$  такие, что

$$\begin{cases} x + y + \frac{x}{y} = 2013 \frac{1}{2012}, \\ \frac{x^2 + xy}{y} = \frac{2013}{2012}. \end{cases}$$

2. Найдите все натуральные числа  $n$ , для которых число  $n \cdot 2^{n+1} + 1$  – точный квадрат.

3. В остроугольном треугольнике  $ABC$  точка  $M$  – середина  $BC$ . Точки  $D$  и  $E$  – основания высот, проведенных из вершин  $C$  и  $B$  соответственно. Точки  $K$  и  $L$  – середины  $EM$  и  $DM$  соответственно. Прямая  $KL$  пересекает прямую, проходящую через  $A$  параллельно  $BC$ , в точке  $T$ . Докажите, что  $TA = TM$ .

4. Жители Банановой Республики должны выбрать парламент. Каждый житель предложил 10 кандидатов, и будет счастлив, если хотя бы один из его кандидатов попадет в парламент. Для любых шести граждан БР можно так подобрать парламент всего из двух человек, что эти шестеро будут счастливы. Докажите, что можно подобрать парламент из 10 человек так, что в БР наступит всеобщее счастье (т. е. все жители будут счастливы).