

### 11 класс

1. У Рапунцель волосы растут вдвое быстрее, чем она сама, а у Алисы, которая растёт со скоростью волос Рапунцель, – в полтора раза быстрее, чем растёт Алиса. Сейчас у Алисы и Рапунцель одинаковая высота волос над полом. Чьи волосы раньше достигнут пола? Ответ обоснуйте.

2. Пусть  $\{a_n\}$  возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел. Известно, что  $a_3 = 13$ . Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$a_{a_1} + a_{a_2} + a_{a_3} + a_{a_4} + a_{a_5}.$$

Ответ обоснуйте.

3. Найдите все пары простых чисел  $(p, q)$ , при которых уравнение

$$x^4 + (q - 2)x = p - 4$$

имеет хотя бы один целый корень.

4. В стране 2014 городов, причём любые два из них соединены ровно одной односторонней авиалинией. Известно, что из каждого города можно вылететь хотя бы в один из остальных городов страны. Назовём город *центральным*, если до него можно долететь из любого другого, сделав не более одной пересадки. Найдите максимальное  $k$  такое, что, независимо от направления авиалиний, хотя бы  $k$  городов будут центральными. Ответ обоснуйте.

5. В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  диагонали  $AC$  и  $BD$  взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке  $E$ . На стороне  $AD$  выбрана точка  $P$  такая, что  $PE = EC$ . Описанная окружность треугольника  $BCD$  пересекает отрезок  $AD$  в точке  $Q$ . Окружность, проходящая через точку  $A$  и касающаяся прямой  $EP$  в точке  $P$ , пересекает отрезок  $AC$  в точке  $R$ . Оказалось, что точки  $B, Q, R$  лежат на одной прямой. Докажите, что  $\angle BCD = 90^\circ$ .

*Каждая задача оценивается в 7 баллов.*

*На выполнение заданий отводится 3,5 часа.*

*Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими электронными устройствами запрещается.*

Результаты можно узнать по тел. 707-52-70 (начиная со 2 декабря).

Апелляция состоится 3 декабря с 15<sup>00</sup> до 17<sup>00</sup> в ауд. 6-52.

Условия и решения задач олимпиады можно будет найти в интернете

по адресу [sites.google.com/site/kharkivolimp/](http://sites.google.com/site/kharkivolimp/)

### 11 клас

1. У Рапунцель волосся росте вдвічі швидше, ніж вона сама, а в Алісі, яка росте зі швидкістю волосся Рапунцель, – у півтора рази швидше, ніж росте Аліса. Зараз в Алісі й у Рапунцель однакова висота волосся над підлогою. Чіє волосся раніше досягне підлоги? Відповідь обґрунтуйте.

2. Нехай  $\{a_n\}$  зростаюча арифметична прогресія, що складається з натуральних чисел. Відомо, що  $a_3 = 13$ . Знайдіть найбільше можливе значення виразу

$$a_{a_1} + a_{a_2} + a_{a_3} + a_{a_4} + a_{a_5}.$$

Відповідь обґрунтуйте.

3. Знайдіть усі пари простих чисел  $(p, q)$ , при яких рівняння

$$x^4 + (q - 2)x = p - 4$$

має хоча б один цілий корінь.

4. У країні 2014 міст, причому будь-які два з них з'єднані рівно однією односторонньою авіалінією. Відомо, що з кожного міста можна вилетіти хоча б до одного з решти міст країни. Назвемо місто *центральним*, якщо до нього можна долетіти з будь-якого іншого, зробивши не більше однієї пересадки. Знайдіть максимальне  $k$  таке, що, незалежно від напрямку авіаліній, хоча б  $k$  міст будуть центральними. Відповідь обґрунтуйте.

5. В опуклому чотирикутнику  $ABCD$  діагоналі  $AC$  й  $BD$  взаємно перпендикулярні та перетинаються в точці  $E$ . На стороні  $AD$  обрано точку  $P$ , що  $PE = EC$ . Описане коло трикутника  $BCD$  перетинає відрізок  $AD$  в точці  $Q$ . Коло, що проходить через точку  $A$  і дотикається прямої  $EP$  в точці  $P$ , перетинає відрізок  $AC$  в точці  $R$ . Виявилось, що точки  $B, Q, R$  належать одній прямій. Доведіть, що  $\angle BCD = 90^\circ$ .

*Кожна задача оцінюється у 7 балів.*

*На виконання завдань відводиться 3,5 години.*

*Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.*

Результати можна дізнатися за тел. 707-52-70 (починаючи з 2 грудня).

Апеляція відбудеться 3 грудня з 15<sup>00</sup> до 17<sup>00</sup> в ауд. 6-52.

Умови та розв'язки задач олімпіади можна буде знайти в інтернеті

за адресою [sites.google.com/site/kharkivolimp/](http://sites.google.com/site/kharkivolimp/)