

Олимпиада по математике ХФМЛ №27, 2015 г., 10 класс

1. Пусть a, b, c – длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что при всех действительных значениях x трехчлен $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2$ принимает только положительные значения.

2. У бабы Яги в первой бочке хранится 40 литров 45-процентной мухоморной эссенции, во второй бочке – 50 литров 48-процентной мухоморной эссенции, а в третьей бочке – 10 литров мухоморной эссенции, концентрация которой неизвестна. Баба Яга решила освободить третью бочку, перелив всю эссенцию из нее в первую и вторую бочки. В результате и в первой, и во второй бочках образовалась 50-процентная мухоморная эссенция. Найдите концентрацию мухоморной эссенции, которая была в третьей бочке.

3. Решите уравнение $\frac{(x^2 + 1)x}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{10}{9}$.

4. Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана точка P так, что $\angle PAC = \angle PBC$. Пусть M и N – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны BC и AC соответственно, D – середина AB . Докажите, что $DM = DN$.

5. Существуют ли простые числа p и q , удовлетворяющие равенству $p^2(p^3 - 1) = q(q + 1)$?

6. 25 волейбольных команд провели турнир в один круг. Оказалось, что среди любых пяти из них есть команда, выигравшая у остальных четырех, и команда, проигравшая остальным четырем. Докажите, что найдется команда, которая выиграла ровно у 12 других. *Ничьих в волейболе не бывает.*