Областная олимпиада юных математиков, 11 класс, 2015 г.

I тур

1. Существуют ли действительные числа x, y, z, удовлетворяющие равенству:

$$\frac{1}{(x-y)(x+y)}+\frac{1}{(y-z)(y+z)}+\frac{1}{(z-x)(z+x)}=0\,?$$

2. Найдите все натуральные числа n, у которых больше $\frac{n}{2}$ делителей.

3. Известно, что многочлен

$$P(x)=x^{2016}+2016x^{2015}+a_{2014}x^{2014}+a_{2013}x^{2013}+\ldots+a_1x+1$$

можно также представить в виде $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{2016})$, где среди чисел x_1, x_2,…, x_{2016} по крайней мере 2015 отрицательных и не обязательно различных. Найдите все коэффициенты многочлена $P(x)$.

4. В остроугольном треугольнике ABC стороны AB и BC имеют разную длину, а продолжение медианы BM пересекает описанную окружность в точке N. На этой окружности отметили такую точку D, что $\angle BDH=90^\circ$, где H – точка пересечения высот треугольника ABC. Точка K выбрана так, что $ANCK$ – параллелограмм. Докажите, что прямые AC, KH и BD пересекаются в одной точке.

5. В стране есть 2015 городов, некоторые из которых соединены двусторонними авиалиниями. Известно, что для каждого $n>3$ не существует n попарно разных городов A_1, A_2,…, A_n, для которых есть замкнутый маршрут перелетов $A_1\to A_2\to\ldots\to A_n\to A_1$ (для трех городов такие маршруты могут существовать). Какое наибольшее число пар городов этой страны могут быть соединены прямым авиасообщением?

II тур

1. Пусть натуральные числа $a_1<a_2<\ldots<a_n$ таковы, что a_k делит a_{k+2} для любого $k=1,2,\ldots,n-2$. Известно, что $a_n=1000$. Найдите наибольшее возможное значение n.

2. Действительные числа $x_1,x_2,\ldots,x_{2015}$ удовлетворяют условиям

$$x_1^{2014}+\ldots+x_{2015}^{2014}=1 \quad \text{и} \quad x_1^{2015}+\ldots+x_{2015}^{2015}=-1.$$

Чему может равняться значение выражения $x_1+x_2^2+x_3^3+\ldots+x_{2015}^{2015}$?

3. Пусть ABC – равнобедренный треугольник, в котором $AB=AC$, O – произвольная точка на прямой BC такая, что окружность с центром O, проходящая через A, не касается прямых AB и AC. Прямые AB и AC пересекают окружность в точках M и N соответственно. Найдите ГМТ ортоцентров треугольников AMN.

4. Для произвольного натурального n числа $n,n+1,\ldots,6n-1,6n$ записаны в ряд в некотором порядке. Докажите, что существует натуральное число, которое можно представить двумя разными способами как сумму нескольких (возможно, одного) идущих подряд чисел этого ряда.