Областная олимпиада юных математиков, 10 класс, 2016 г.

I тур

1. Два близнеца – Петя и Остап – поссорились и стали ходить из дома в школу разными путями. Петя вначале идет 210 метров на юг, а далее 70 метров на восток и попадает в школу. Остап вначале идет некоторое время на север, а далее по прямой в школу. Сколько именно метров Остап идет на север, если близнецы ходят с одинаковой скоростью и приходят в школу одновременно?

2. Есть 12 стульев, расположенных в одну линию и перенумерованных слева направо числами 1, 2,. . . , 12. Отец Федор может прыгать по этим стульям по таким правилам: со стула с номером k он может прыгнуть на стул с номером n тогда и только тогда, когда $|k-n| = 5$ или $|k-n| = 8$. Известно, что отец Федор, начав с некоторого стула, смог прыгать по ним так, что побывал на каждом стуле ровно 1 раз. Со стула с каким номером должен отец Федор начать прыгать?

3. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами для каждого целого значения x делится нацело на натуральное число N. Обязательно ли на N делится каждый из коэффициентов трехчлена $f(x)$, если
а)$N = 2016$;   б)$N = 2017$?

4. На окружности с диаметром AB выбрали и зафиксировали точку M. После этого выбирается точка Q_i, для которой хорда MQ_i пересекает AB в точке K_i и при этом $\angle MK_iB < 90°$. Хорда, которая перпендикулярна AB и проходит через точку K_i, пересекает прямую BQ_i в точке P_i. Докажите, что все точки P_i лежат на одной прямой.

5. Для произвольных действительных чисел x, y, z, принадлежащих промежутку $[0, 1]$, докажите неравенство

$$\left(x^4 + y^4 + z^4\right) + \left(x^5 + y^5 + z^5\right) + (x-y)^6 + (y-z)^6 + (z-x)^6 \leqslant 6.$$

II тур

1. Найдите все действительные решения уравнения $x^2 + 2x \sin xy + 1 = 0$.

2. Отличница Маша решила приготовить папе подарок ко дню рождения. Она перемножила все натуральные числа от 1 до числа, равного количеству лет, которое исполнялось папе. Маша собиралась написать это число кремом на праздничном тортике, но все число на тортик не помещалось, поэтому она написала только последние 10 цифр полученного произведения: 3 616 000 000. Сколько лет должно исполниться папе?

3. В остроугольном треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D. Пусть O_1 и O_2 – центры окружностей, описанных около треугольников ABD и ACD соответственно; O – центр описанной окружности треугольника ABC; H – ортоцентр треугольника O_1O_2D. Докажите, что $OH \parallel BC$.

4. В олимпиаде по математике принимают участие n школьников. Организаторы хотят после подведения итогов раздать участникам плюшки так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) каждый участник должен получить хотя бы одну плюшку;

2) все приготовленные плюшки должны быть розданы;

3) для любой пары участников больше плюшек должен получить тот, кто набрал больше баллов на олимпиаде, а если результаты одинаковые, то и плюшек они должны получить равное количество.

Какое наименьшее количество плюшек должны заранее заготовить организаторы, чтобы им удалось наградить участников?