Областная олимпиада юных математиков, 10 класс, 2015 г.

I тур

1. Для произвольных попарно разных положительных чисел a, b, c решите уравнение:

$$x^3a - xa^3 + a^3b - ab^3 + b^3x - bx^3 = (x-a)(x-b)(x-c)(a-b).$$

2. Найдите наименьшее натуральное число m, для которого существуют такие натуральные числа $n > k > 1$, что выполняется равенство:

$$\underbrace{11\ldots1}_{n} = \underbrace{11\ldots1}_{k} \cdot m.$$

3. Винни-Пух и Пятачок играют в игру по таким правилам. Есть палка длиной 15 см. Первым ходом Пятачок разламывает ее на две части, далее игроки по очереди разламывают на две части один из имеющихся кусочков. При этом, кусочки должны иметь натуральную длину (в сантиметрах) и не могут равняться 1 см. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

4. Для неотрицательных чисел a, b, c докажите неравенство:

$$a\sqrt{3a^2+6b^2} + b\sqrt{3b^2+6c^2} + c\sqrt{3c^2+6a^2} \geqslant (a+b+c)^2.$$

5. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точках A и B. Вокруг треугольника O_1O_2B описали окружность ω с центром в точке O, пересекающую окружности ω_1 и ω_2 второй раз в точках K и L соответственно. Прямая OA пересекает окружности ω_1 и ω_2 в точках M и N соответственно. Прямые MK и NL пересекаются в точке P. Докажите, что точка P лежит на окружности ω и $PM = PN$.

II тур

1. Найдите площадь области, заданной на координатной плоскости условием

$$x^2 + y^2 < |x| + |y|.$$

2. В ряд расставлены $n > 2$ лампочек. У каждой лампочки есть выключатель, который при нажатии изменяет состояние лампочки. Изначально все лампочки выключены. Петя может одновременно нажимать на два выключателя соседних лампочек. При каких n он может такими переключениями добиться того, что среди любых трех идущих подряд лампочек ровно одна будет включена?

3. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точках A и B. Линия центров этих окружностей пересекает окружность ω_1 в точке Q, не лежащей внутри ω_2, и окружность ω_2 в точке X, лежащей внутри ω_1. Вокруг треугольника O_1AX описали окружность ω_3, которая пересекает окружность ω_1 в точке T ($T \neq A$). Прямая QT пересекает окружность ω_3 в точке K ($K \neq T$). Прямая QB пересекает окружность ω_2 в точке $H (H \neq B)$. Докажите что:

а) точки T, X, B лежат на одной прямой;

б) точки K, X, H лежат на одной прямой.

4. Докажите, что для каждого натурального $n > 2$ число n^4+1 не имеет делителей на промежутке $[n^2-2n, n^2+2n]$.