Областная олимпиада юных математиков, 10 класс, 2014 г.

I тур

1. Решите неравенство:

$$\frac{(x+1)^4}{(x-1)^3}+\frac{x-1}{16}\geqslant\frac{(x+1)^2}{2\,(x-1)}.$$

2. Существуют ли четверки действительных чисел a, b, c, d, удовлетворяющие условиям

$$a+b+c=d,\qquad \frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=\frac{1}{ad}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd}\,?$$

3. Решите в натуральных числах следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x^2=4y^2+3z^2+2,\\ 13x=4y+3z+29. \end{cases}$$

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Из вершины A на прямую A_1B_1 опущен перпендикуляр AK, а из вершины B опущен перпендикуляр BL на прямую C_1B_1. Докажите, что $A_1K=B_1L$.

5. Дан выпуклый 11-угольник. Его диагонали покрашены в несколько цветов. Два цвета называются пересекающимися, если существуют два отрезка, покрашенные в эти цвета и пересекающиеся в некоторой внутренней точке этих отрезков. Какое наибольшее количество разных цветов может быть использовано, чтобы каждые два использованных цвета пересекались?

II тур

1. Решите в целых числах уравнение $mn-m=n^3+n^2-5$.

2. В городе N проводится футбольный турнир, в котором каждая команда должна сыграть с каждой ровно по одному разу. После некоторого количества сыгранных игр выяснилось, что любые 5 команд можно расположить по кругу так, что каждая команда уже сыграла со своими соседями. Докажите, что можно составить расписание таким образом, чтобы за три дня турнир закончился, причём каждый день каждая команда играла бы не более одного матча.

3. Существует ли функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, такая, что для каждого действительного y существует действительное x такое, что $f(x)=y$, и при всех действительных x выполнено равенство

$$f(f(x))=(x-1)\,f(x)+2\,?$$

4. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD равны и пересекаются в точке P. Окружности ω_1 и ω_2 описаны вокруг треугольников ABP и CDP соответственно, а их центры обозначены O_1 и O_2. Отрезок BC повторно пересекает ω_1 и ω_2 в точках S и T соответственно. Точки M и N – середины дуг SP и TP окружностей ω_1 и ω_2, не содержащих точек B и C. Докажите, что $MN\parallel O_1O_2$.